単位球面に於けるソボレフ埋蔵

令和 3 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位球面 S^{n-1} を向き付けられたコンパクトリーマン多様体と見做した場合に成立するソボレフ埋蔵が回転群の生成作用素と立体射影によって $\mathbb{R}^n$ に於ける通常のソボレフ埋蔵から導かれる事を直接計算によって確かめよう。

1　ユークリッド空間に於けるソボレフ埋蔵

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於ける典型的なソボレフ埋蔵不等式として

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_{n,s}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.1}$$

を考えよう。ここに $s \in \left(\frac{n}{2}, +\infty\right)$, $H^s = (1-\Delta)^{-\frac{s}{2}}L^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2;\ (1-\Delta)^{\frac{s}{2}}u \in L^2\}$,

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{H^s} = \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_2 = \|\mathscr{F}^{-1}(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}u\|_2 = \|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\|_2,\\
&(\mathscr{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-ix\cdot\xi)u(x)dx
\end{aligned}$$

であり $C_{n,s}$ は n と s にのみ依存する正定数とする。(1.1) はフーリエ反転公式及びコーシー・シュワルツの不等式より直ちに従う：

$$\|u\|_\infty = \|\mathscr{F}^{-1}\hat{u}\|_\infty \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^s} \tag{1.2}$$

よって $C_{n,s}$ は

$$C_{n,s} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma_{n-1}\int_0^{+\infty}r^{n-1}(1+r^2)^{-s}dr\right)^{-\frac{1}{2}}$$

で与えられ $s \in \left(\frac{n}{2}, +\infty\right)$ に対して有限で $C_{n,s} \uparrow +\infty (s \downarrow \frac{n}{2})$ となる。ここに σ_{n-1} は単位球面 S^{n-1} の測度 $\sigma(S^{n-1})$ であり、ガンマ函数 Γ を用いて

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{1.3}$$

と表される。m を $\frac{n}{2} < m \le \frac{n}{2}+1$ なる唯一つの整数、即ち $m = \left[\frac{n}{2}\right]+1$ とする。このとき $m \ge \frac{n}{2}+\frac{1}{2}$ であるから

$$\int_0^\infty r^{n-1}(1+r^2)^{-m}dr \le \int_0^\infty (1+r^2)^{\frac{n-1}{2}-m}dr \le \int_0^\infty (1+r^2)^{-1}dr = \frac{\pi}{2} \tag{1.4}$$

が従う。また

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H^m}^2 &= \int (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\le 2^{m-1} \int (|\xi|^{2m}+1)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = 2^{m-1}\left(\||\xi|^m \hat{u}\|_2^2 + \|u\|_2^2\right), \qquad (1.5) \\
\||\xi|^m \hat{u}\|_2^2 &= \int |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int \xi^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int |\partial^\alpha u(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \|\partial^\alpha u\|_2^2 \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

であるから (1.2)-(1.6) より

$$
\begin{aligned}
\|u\|_\infty^2 &\le (2\pi)^{-n} \cdot \sigma_{n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2^{m-1} \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \|\partial^\alpha u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \Big) \\
&= \frac{2^{-n+m-1}\pi^{-\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \|\partial^\alpha u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \Big) \\
&\le \frac{n(n+2)}{2^{\frac{n}{2}+2}\pi^{\frac{n}{2}-1}} \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \Big) \le \frac{n(n+2)}{2^{\frac{n}{2}+2}\pi^{\frac{n}{2}-1}} \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_2 + \|u\|_2 \Big)^2
\end{aligned}
$$

これより

$$
\|u\|_\infty^2 \le \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 + \|u\|_2^2, \tag{1.7}
$$

$$
\|u\|_\infty \le \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_2 + \|u\|_2 \tag{1.8}
$$

が従う。ここに $m! = \Gamma(m+1) \le \Gamma\Big(\frac{n}{2}+2\Big) = \Big(\frac{n}{2}+1\Big)\frac{n}{2}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)$ および $n(n+2) \le \frac{4}{\pi}(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\forall\, n \ge 1)$ を用いた。後者は $2n+3 \le \frac{4}{\pi}(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\forall\, n \ge 2)$ 及び n に関する帰納法により導かれる。

2 単位球面に於けるソボレフ埋蔵

単位球面 $S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ |\xi| = 1\}$ を向き付けられたコンパクトリーマン多様体と見做し σ をルベーグ測度とする。このとき (1.3) は $\sigma(S^{n-1}) = \sigma_{n-1}$ と表される。$1 \le j < k \le n$ なる $j,\ k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$
L_{jk} = x_j \partial_k - x_k \partial_j
$$

と置く。これは $x_j x_k$ 平面に於ける回転群の生成作用素である。単位球面に於けるソボレフ埋蔵不等式で (1.7) に対応するものとして

$$
\|u\|_{L^\infty(S^{n-1})}^2 \le C_n \sum_{|\alpha| \le (n+1)/2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^{n-1})}^2 \tag{2.1}
$$

を考えよう。ここに $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n(n-1)/2}$ は多重指数であり L^α は

$$L^\alpha = L_{12}^{\alpha_1} \cdots L_{1n}^{\alpha_{n-1}} L_{23}^{\alpha_n} \cdots L_{2n}^{\alpha_{2n-3}} \cdots L_{n-1,n}^{\alpha_{n(n-1)/2}}$$

で定義されるものとする。$\omega \in S^{n-1}$ に於ける接空間 $T_\omega S^{n-1}$ は $(L_{jk};\ 1 \leq j < k \leq n)$ で生成され (1.7) に於ける多重指数の条件を $|\alpha| = m \leq \dfrac{n}{2} + 1$ と見做すと、対応する多重指数の長さの制限は $\dfrac{1}{2}\dim(S^{n-1}) + 1 = \dfrac{n+1}{2}$ となる事に注目しよう。前者は $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 上の等式

$$\partial_j = \frac{x_j}{|x|}\partial_r - \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x|} L_{jk}, \quad \partial_r = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x|}\partial_k$$

は $C^\infty(S^{n-1})$ 上で

$$\partial_j \big| C^\infty(S^{n-1}) = -\sum_{k=1}^n \omega_j L_{jk} \big| C^\infty(S^{n-1})$$

と表される事から直接確かめられる。以上の理由により、(2.1) はリーマン多様体上のソボレフ埋蔵不等式の特別な例と考えられる。(2.1) は波動方程式に関するクライネルマンの不等式の基礎となっており、非線型波動方程式の解析に著しい応用を持つ。

3　単位球面に於けるソボレフ埋蔵の証明（1 次元の場合）

$u \in C^\infty(S^1)$ を $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$ による引き戻しによって表される周期 2π の滑らかな函数と同一視し周期函数 $|u|^2 = u\bar{u} : [0, 2\pi] \ni \theta \to |u(\cos\theta, \sin\theta)|^2 \in \mathbb{R}$ をフーリエ級数展開する：

$$|u|^2(\cos\theta, \sin\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u|^2(\cos\theta, \sin\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

このとき $u^\sharp(\theta) = u(\cos\theta, \sin\theta)$ と置くとコーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
|u(\cos\theta, \sin\theta)|^2 &= a_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n e^{in\theta} \\
&\leq |a_0| + \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2 |a_n|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u^\sharp|^2 + \Big(\frac{\pi^2}{3}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_\theta |u^\sharp|^2 e^{-in\theta} d\theta\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u^\sharp|^2 + 2\Big(\frac{\pi^2}{3}\Big)^{1/2} \|u^\sharp\|_{L^\infty(0,2\pi)} \|\partial_\theta u^\sharp\|_{L^2(0,2\pi)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\|u^\sharp\|_{L^2(0,2\pi)}^2 + \frac{1}{2}\|u^\sharp\|_{L^\infty(0,2\pi)}^2 + \frac{2\pi^2}{3}\|\partial_\theta u^\sharp\|_{L^2(0,2\pi)}^2
\end{aligned}$$

を得る。これより

$$\|u^\sharp\|_{L^\infty(0,2\pi)}^2 \leq \frac{1}{\pi}\|u^\sharp\|_{L^2(0,2\pi)}^2 + \frac{4\pi^2}{3}\|\partial_\theta u^\sharp\|_{L^2(0,2\pi)}^2$$

を得る。このとき

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta u^\sharp(\theta) &= -\sin\theta(\partial_1 u)(\cos\theta,\sin\theta)+\cos\theta(\partial_2 u)(\cos\theta,\sin\theta)\\
&= (L_{12}u)(\cos\theta,\sin\theta) = (L_{12}u)^\sharp(\theta)
\end{aligned}
$$

より

$$
\|u\|^2_{L^\infty(S^1)} \le \frac{1}{\pi}\|u\|^2_{L^2(S^1)} + \frac{4\pi^2}{3}\|L_{12}u\|^2_{L^2(S^1)}
$$

が従う。よって $n=2$ の場合 $C_2=\dfrac{4\pi^2}{3}$ として (2.1) が成立する。

4 単位球面に於けるソボレフ埋蔵の証明（2 次元の場合）

3 次元ユークリッド空間に於ける 2 次元単位球面 $S^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3;\ |\xi| = 1\}$ を $S^2_\pm := \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in S^2;\ \pm\xi_3 \ge 0\}$ として $S^2 = S^2_+ \cup S^2_-$ と表しておく。このとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N} := (0,0,1)\in S^2_+,\ \mathrm{S} = (0,0,-1)\in S^2_-,\\
&S^2_+ \cap S^2_- = S^2\cap(\mathbb{R}^2\times\{0\}) = \{(\xi_1,\xi_2,0)\in\mathbb{R}^3;\ \xi_1^2+\xi_2^2 = 1\}
\end{aligned}
$$

となっている。立体射影の逆写像 $\pi_{\mathrm{N}}:\mathbb{R}^2\to S^2\setminus\{N\},\ \pi_{\mathrm{S}}:\mathbb{R}^2\to S^2\setminus\{S\}$ を

$$
\pi_{\mathrm{N}}(t,s) := \Big(\frac{2t}{1+t^2+s^2},\ \frac{2s}{1+t^2+s^2}, -\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\Big), \tag{4.1}
$$

$$
\pi_{\mathrm{S}}(t,s) := \Big(\frac{2t}{1+t^2+s^2},\ \frac{2s}{1+t^2+s^2}, \frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\Big) \tag{4.2}
$$

によって定める。このとき $\pi_{\mathrm{N}}\,\big|\,\overline{B(0;1)} : \overline{B(0;1)} \to S^2_-$ 及び $\pi_{\mathrm{S}}\,\big|\,\overline{B(0;1)} : \overline{B(0;1)} \to S^2_+$ は全単射であり、任意の $(\rho,\theta)\in[0,1]\times[0,2\pi)$ に対し、等式

$$
\pi_{\mathrm{N}}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \Big(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\cos\theta,\ \frac{2\rho}{1+\rho^2}\sin\theta,\ -\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big), \tag{4.3}
$$

$$
\pi_{\mathrm{S}}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \Big(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\cos\theta,\ \frac{2\rho}{1+\rho^2}\sin\theta,\ \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big) \tag{4.4}
$$

が成立する。特に $\pi_{\mathrm{N}}(0,0) = (0,0,-1) = \mathrm{S},\ \pi_{\mathrm{S}}(0,0) = (0,0,-1) = \mathrm{N},$

$$
\begin{aligned}
&\pi_{\mathrm{N}}(\partial B(0;\rho)) = \partial B\Big(0;\frac{2\rho}{1+\rho^2}\Big)\times\Big\{-\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big\},\\
&\pi_{\mathrm{S}}(\partial B(0;\rho)) = \partial B\Big(0;\frac{2\rho}{1+\rho^2}\Big)\times\Big\{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big\},\\
&\pi_{\mathrm{N}}(\cos\theta,\sin\theta) = \pi_{\mathrm{S}}(\cos\theta,\sin\theta) = (\cos\theta,\sin\theta,0)
\end{aligned}
$$

が成立する。$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ の π_{N} 及び π_{S} に依る引き戻し $\pi_{\mathrm{N}}^* u, \pi_{\mathrm{S}}^* u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の一階偏導函数は

$$
\begin{aligned}
&\partial_1(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s) = \partial_t(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s) \\
&= \partial_t\Big(\frac{2t}{1+t^2+s^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u + \partial_t\Big(\frac{2s}{1+t^2+s^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u - \partial_t\Big(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_3 u \\
&= \frac{2(1-t^2-s^2)+4s^2}{(1+t^2+s^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u - \frac{4ts}{(1+t^2+s^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u + \frac{4t}{(1+t^2+s^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_3 u \\
&= \frac{2}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u + \frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_3 u\Big) \\
&\quad + \frac{2s}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u - \frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u\Big) \\
&= \frac{2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^* L_{13} u - \frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^* L_{12} u \\
&= \pi_{\mathrm{N}}^*(L_{13}u - x_3 L_{13}u - x_2 L_{12}u)(t,s), \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_2(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s) = \partial_s(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s) \\
&= \partial_s\Big(\frac{2t}{1+t^2+s^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u + \partial_s\Big(\frac{2s}{1+t^2+s^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u - \partial_s\Big(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_3 u \\
&= -\frac{4ts}{(1+t^2+s^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u + \frac{2(1-t^2-s^2)+4t^2}{(1+t^2+s^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u + \frac{4s}{(1+t^2+s^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_3 u \\
&= \frac{2}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u + \frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_3 u\Big) \\
&\quad + \frac{2t}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_2 u - \frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_1 u\Big) \\
&= \frac{2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^* L_{23} u + \frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{N}}^* L_{12} u \\
&= \pi_{\mathrm{N}}^*(L_{23}u - x_3 L_{23}u + x_1 L_{12}u), \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_1(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(t,s) = \partial_t(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(t,s) \\
&= \frac{2}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_1 u - \frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_3 u\Big) \\
&\quad + \frac{2t}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_1 u - \frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_2 u\Big) \\
&= -\frac{2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^* L_{13} u - \frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^* L_{12} u \\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*(-L_{13}u - x_3 L_{13}u - x_1 L_{12}u), \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_2(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(t,s) = \partial_s(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(t,s) \\
&= \frac{2}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{1-t^2-s^2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_1 u - \frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_3 u\Big) \\
&\quad + \frac{2t}{1+t^2+s^2}\Big(\frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_2 u - \frac{2s}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_1 u\Big) \\
&= -\frac{2}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^* L_{23} u - \frac{2t}{1+t^2+s^2}\pi_{\mathrm{S}}^* L_{12} u \\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*(-L_{23}u - x_3 L_{23}u + x_1 L_{12}u) \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

と計算される。ここに $(\pi_{\mathrm{N}}^*(1-x_3))(t,s)=(\pi_{\mathrm{S}}^*(1+x_3))(t,s)=\dfrac{2}{1+t^2+s^2}$ を用いた。
これより π_{N}^*u 及び π_{S}^*u の一階偏導函数は

$$\begin{aligned}
&|\partial_1(\pi_{\mathrm{N}}^*u)(t,s)|+|\partial_2(\pi_{\mathrm{N}}^*u)(t,s)| \\
&\le \frac{2}{1+t^2+s^2}(|(\pi_{\mathrm{N}}^*L_{13}u)(t,s)|+|(\pi_{\mathrm{N}}^*L_{23}u)(t,s)|)+\frac{2(|t|+|s|)}{1+t^2+s^2}|(\pi_{\mathrm{N}}^*L_{12}u)(t,s)|, \qquad (4.9)\\
&|\partial_1(\pi_{\mathrm{S}}^*u)(t,s)|+|\partial_2(\pi_{\mathrm{S}}^*u)(t,s)| \\
&\le \frac{2}{1+t^2+s^2}(|(\pi_{\mathrm{S}}^*L_{13}u)(t,s)|+|(\pi_{\mathrm{S}}^*L_{23}u)(t,s)|)+\frac{2(|t|+|s|)}{1+t^2+s^2}|(\pi_{\mathrm{S}}^*L_{12}u)(t,s)| \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

と評価される。さらに (4.5)-(4.8) より $\pi_{\mathrm{N}}^*u,\ \pi_{\mathrm{S}}^*u$ の二階偏導函数は

$$\begin{aligned}
&\partial_1^2\pi_{\mathrm{N}}^*u=\partial_1(\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)L_{13}u-x_2L_{12}u))\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*\left((1-x_3)L_{13}\left((1-x_3)L_{13}u-x_2L_{12}u\right)-x_2L_{12}\left((1-x_3)L_{13}u-x_2L_{12}u\right)\right)\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)^2L_{13}^2u-x_1(1-x_3)L_{13}u-x_2(1-x_3)(L_{12}L_{13}u+L_{23}u)\\
&\qquad -x_2(1-x_3)L_{12}L_{13}u+x_2^2L_{12}^2u+x_1x_2L_{12}u)\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)^2L_{13}^2u-2x_2(1-x_3)L_{12}L_{13}u+x_2^2L_{12}^2u\\
&\qquad +x_1x_2L_{12}u-x_1(1-x_3)L_{13}u-x_2(1-x_3)L_{23}u), \qquad (4.11)\\
&\partial_1\partial_2\pi_{\mathrm{N}}^*u=\partial_1(\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)L_{23}u+x_1L_{12}u))\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*\left((1-x_3)L_{13}\left((1-x_3)L_{23}u+x_1L_{12}u\right)-x_2L_{12}\left((1-x_3)L_{23}u+x_1L_{12}u\right)\right)\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)^2L_{13}L_{23}u-x_1(1-x_3)L_{23}u+x_1(1-x_3)(L_{12}L_{13}u+L_{23}u)-x_3(1-x_3)L_{12}u\\
&\qquad -x_2(1-x_3)L_{12}L_{23}u-x_1x_2L_{12}^2u+x_2^2L_{12}u)\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)^2L_{13}L_{23}u+x_1(1-x_3)L_{12}L_{13}u-x_2(1-x_3)L_{12}L_{13}u-x_1x_2L_{12}^2u\\
&\qquad +(x_2^2-x_3(1-x_3))L_{12}u), \qquad (4.12)\\
&\partial_2^2\pi_{\mathrm{N}}^*u=\partial_2(\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)L_{23}u+x_1L_{12}u))\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*\left((1-x_3)L_{23}\left((1-x_3)L_{23}u+x_1L_{12}u\right)+x_1L_{12}\left((1-x_3)L_{23}u+x_1L_{12}u\right)\right)\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)^2L_{23}^2u-x_2(1-x_3)L_{23}u+x_1(1-x_3)(L_{12}L_{23}u-L_{13}u)\\
&\qquad +x_1(1-x_3)L_{12}L_{23}u+x_1^2L_{12}^2u-x_1x_2L_{12}u)\\
&=\pi_{\mathrm{N}}^*((1-x_3)^2L_{23}^2u+2x_1(1-x_3)L_{12}L_{13}u+x_1^2L_{12}^2u\\
&\qquad -x_1x_2L_{12}u-x_1(1-x_3)L_{13}u-x_2(1-x_3)L_{23}u), \qquad (4.13)\\
&\partial_1^2(\pi_{\mathrm{S}}^*u)=\partial_1(\pi_{\mathrm{S}}^*(-(1+x_3)L_{13}u-x_2L_{12}u))\\
&=\pi_{\mathrm{S}}^*\left((1+x_3)L_{13}\left((1+x_3)L_{13}u+x_2L_{12}u\right)+x_2L_{12}\left((1+x_3)L_{13}u+x_2L_{12}u\right)\right)\\
&=\pi_{\mathrm{S}}^*((1+x_3)^2L_{13}^2u+x_1(1+x_3)L_{13}u+x_2(1+x_3)(L_{12}L_{13}u+L_{23}u)\\
&\qquad +x_2(1+x_3)(L_{12}L_{13}u+x_2^2L_{12}^2u+x_1x_2L_{12}u)\\
&=\pi_{\mathrm{S}}^*((1+x_3)^2L_{13}^2u+2x_2(1+x_3)L_{12}L_{13}u+x_2^2L_{12}^2u\\
&\qquad +x_1x_2L_{12}u+x_1(1+x_3)L_{13}u+x_2(1+x_3)L_{23}u), \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_1\partial_2(\pi_{\mathrm{S}}^*u) = \partial_1(\pi_{\mathrm{S}}^*(-(1+x_3)L_{23}u + x_1L_{12}u))\\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*\left(-(1+x_3)L_{13}\left(-(1+x_3)L_{23}u + x_1L_{12}u\right) - x_2L_{12}\left(-(1+x_3)L_{23}u + x_1L_{12}u\right)\right)\\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*((1+x_3)^2L_{13}L_{23}u + x_1(1+x_3)L_{23}u - x_1(1+x_3)(L_{12}L_{13}u + L_{23}u) + x_3(1+x_3)L_{12}u\\
&\qquad - x_2(1+x_3)L_{12}L_{13}u - x_1x_2L_{12}^2u + x_2^2L_{12}u)\\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*((1+x_3)^2L_{13}L_{23}u - x_1(1+x_3)L_{12}L_{13}u - x_2(1+x_3)L_{12}L_{13}u - x_1x_2L_{12}^2u\\
&\qquad + x_1(1+x_3)L_{23}u + (x_2^2 + x_3(1+x_3))L_{12}u), \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_2^2(\pi_{\mathrm{S}}^*u) = \partial_1(\pi_{\mathrm{S}}^*(-(1+x_3)L_{23}u + x_1L_{12}u))\\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*\left(-(1+x_3)L_{23}\left(-(1+x_3)L_{23}u + x_1L_{12}u\right) + x_1L_{12}\left(-(1+x_3)L_{23}u + x_1L_{12}u\right)\right)\\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*((1+x_3)^2L_{23}^2u + x_2(1+x_3)L_{23}u - x_1(1+x_3)(L_{12}L_{23}u - L_{13}u)\\
&\qquad - x_1(1+x_3)L_{12}L_{23}u + x_1^2L_{12}^2u - x_1x_2L_{12}u)\\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*((1+x_3)^2L_{23}^2u - 2x_1(1+x_3)L_{12}L_{23}u + x_1^2L_{12}^2u\\
&\qquad - x_1x_2L_{12}u + x_1(1+x_3)L_{13}u + x_2(1+x_3)L_{23}u) \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

と計算され、再び

$$
(\pi_{\mathrm{N}}^*(1-x_3))(t,s) = (\pi_{\mathrm{S}}^*(1+x_3))(t,s) = \frac{2}{1+t^2+s^2}
$$

を用いると、(4.11)-(4.15) より π_{N}^*u 及び π_{S}^*u の二階導函数は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{N}}^*u)(t,s)|\\
&\le \Big(\frac{4}{(1+t^2+s^2)^2} + \frac{8(|t|+|s|)}{1+t^2+s^2} + 4(|t|+|s|)^2\Big)\sum_{|\alpha|=2}|\pi_{\mathrm{N}}^*(L^\alpha u)(t,s)|\\
&\qquad + \Big(\frac{2+8(|t|+|s|)}{1+t^2+s^2} + 4(|t|+|s|)^2\Big)\sum_{|\alpha|=1}|\pi_{\mathrm{N}}^*(L^\alpha u)(t,s)|, \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{S}}^*u)(t,s)|\\
&\le \Big(\frac{4}{(1+t^2+s^2)^2} + \frac{8(|t|+|s|)}{1+t^2+s^2} + 4(|t|+|s|)^2\Big)\sum_{|\alpha|=2}|\pi_{\mathrm{S}}^*(L^\alpha u)(t,s)|\\
&\qquad + \Big(\frac{2+8(|t|+|s|)}{1+t^2+s^2} + 4(|t|+|s|)^2\Big)\sum_{|\alpha|=1}|\pi_{\mathrm{S}}^*(L^\alpha u)(t,s)| \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

と評価される。

さて $\zeta_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $0 \le \zeta_0 \le 1,\ \mathrm{supp}\,\zeta_0 \subset (-\infty, 2), \zeta_0(\rho) = 1(\forall\rho \in (-\infty, 1])$ なる函数とする。$\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ を $\zeta(t,s) = \zeta_0(\sqrt{t^2+s^2})$ で定める。このとき $\mathrm{supp}\,\zeta \subset \{(t,s) \in \mathbb{R}^2;\ t^2+s^2 < 4\}$ であるから $(t,s) \in \mathrm{supp}\,\zeta$ ならば $1 \le \dfrac{5}{1+t^2+s^2}$ であり線形作用素 $\zeta\pi_{\mathrm{N}}^*:\ L^2(S^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$

の有界性

$$
\begin{aligned}
\|\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\le \iint_{B(0;2)} |(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s)|^2\, dtds \\
&\le \frac{25}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} |(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s)|^2\, \frac{4}{(1+t^2+s^2)} dtds = \frac{25}{4}\|u\|_{L^2(S^2)}^2, \qquad (4.19)\\
\|\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\le \frac{25}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} |(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(t,s)|^2\, \frac{4}{(1+t^2+s^2)} dtds = \frac{25}{4}\|u\|_{L^2(S^2)}^2 \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

が従う。ここに単位球面上の積分の立体射影表現を用いた。

同様に (4.9),(4.10) 及び (4.17),(4.18) を用い

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\le C\sum_{|\alpha|=2} \|\zeta\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{N}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C\left(\|\zeta_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 + \|\zeta_0''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2\right) \sum_{1\le|\alpha|\le 2} \iint_{B(0;2)} |\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(t,s)|^2 dtds \\
&\le C\sum_{|\alpha|=2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^2)}^2 + C\sum_{j=1}^{2} \|\zeta_0^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \sum_{1\le|\alpha|\le 2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^2)}^2, \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\
&\le C\sum_{|\alpha|=2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^2)}^2 + C\sum_{j=1}^{2} \|\zeta_0^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \sum_{1\le|\alpha|\le 2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^2)}^2 \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

を得る。$m = n = 2$ に対するソボレフ埋蔵不等式 (1.8) 及び (4.19)-(4.22) より

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(S_-^2)} &= \|\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^\infty(\overline{B(0;1)})} \le \|\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\
&\le \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\le C\sum_{|\alpha|\le 2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^2)}, \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(S_+^2)} &= \|\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^\infty(\overline{B(0;1)})} \le \|\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\
&\le \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\le C\sum_{|\alpha|\le 2} \|L^\alpha u\|_{L^2(S^2)} \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

が従う。$n = 3$ の場合の (2.1) は (4.23)(4.24) 及び等式 $\|u\|_{L^\infty(S^2)} = \max(\|u\|_{L^\infty(S_+^2)}, \|u\|_{L^\infty(S_-^2)})$ から得られる。

5 単位球面に於けるソボレフ埋蔵の証明（3 次元以上の場合）

3 以上の次元 n を持つユークリッド空間に於ける $(n-1)$-次元単位球面 $S^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ |\xi| = 1\}$ を $S_\pm^{n-1} = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in S^{n-1};\ \pm\xi_n \ge 0\}$ として $S^{n-1} = S_+^{n-1} \cup S_-^{n-1}$ と表しておく。こ

のとき $\mathrm{N}:=(0,\cdots,0,1)\in S_+^{n-1},\ \mathrm{S}:=(0,\cdots,0,-1)\in S_-^{n-1}$,

$$S_+^{n-1}\cap S_-^{n-1}=S^{n-1}\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})=\{(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},0)\in\mathbb{R}^n;\ \xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2=1\}$$

となっている。立体射影の逆写像 $\pi_{\mathrm{N}}:\mathbb{R}^{n-1}\to S^{n-1}\setminus\{N\},\ \pi_{\mathrm{S}}:\mathbb{R}^{n-1}\to S^{n-1}\setminus\{S\}$ を

$$\pi_{\mathrm{N}}(x')=\Big(\frac{2x'}{1+|x'|^2},\ -\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2}\Big), \tag{5.1}$$

$$\pi_{\mathrm{S}}(x')=\Big(\frac{2x'}{1+|x'|^2},\ \frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2}\Big) \tag{5.2}$$

によって定める。ここに $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}),\ |x'|^2=\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}x_j^2$ とする。このとき
$\pi_{\mathrm{N}}\big|\overline{B(0;1)}:\overline{B(0;1)}\to S_-^{n-1}$ 及び $\pi_{\mathrm{S}}\big|\overline{B(0;1)}:\overline{B(0;1)}\to S_+^{n-1}$ は全単射であり、
任意の $(\rho,\omega')\in[0,1]\times S^{n-2}$ に対し、等式

$$\pi_{\mathrm{N}}(\rho\omega')=\Big(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\ \omega',\ -\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big), \tag{5.3}$$

$$\pi_{\mathrm{S}}(\rho\omega')=\Big(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\ \omega',\ \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big) \tag{5.4}$$

が成立する。特に $\pi_{\mathrm{N}}(0)=\mathrm{S},\ \pi_{\mathrm{S}}(0)=\mathrm{N},\ \pi_{\mathrm{N}}(\partial B(0;\rho))=\partial B\Big(0;\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\Big)\times\Big\{-\dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big\}$,
$\pi_{\mathrm{S}}(\partial B(0;\rho))=\partial B\Big(0;\dfrac{2\rho}{1+\rho^2}\Big)\times\Big\{\dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\Big\},\ \pi_{\mathrm{N}}(\omega')=\pi_{\mathrm{S}}(\omega')=(\omega',0)$ が成立する。
$u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の π_{N} 及び π_{S} に依る引き戻し $\pi_{\mathrm{N}}^*u,\ \pi_{\mathrm{S}}^*u\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ の一階偏導函数は
$j\in\{1,\cdots,n-1\}$ に対し

$$\partial_j(\pi_{\mathrm{N}}^*u)(x')=\sum_{k=1}^{n-1}\partial_j\Big(\frac{2x_k}{1+|x'|^2}\Big)(\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ku)(x')-\partial_j\Big(\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2}\Big)(\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_nu)(x')$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{2\delta_{jk}}{1+|x'|}-\frac{4x_jx_k}{(1+|x'|^2)^2}\Big)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ku+\frac{4x_j}{(1+|x'|)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_nu$$

$$=\left(\frac{2(1-|x'|^2)}{(1+|x'|^2)^2}+\sum_{\substack{1\le k\le n-1\\k\ne j}}\frac{4x_k^2}{(1+|x'|^2)^2}\right)\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ju-\sum_{\substack{1\le k\le n-1\\k\ne j}}\frac{4x_jx_k}{(1+|x'|^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ku+\frac{4x_jx_k}{(1+|x'|^2)^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_nu$$

$$=\frac{2}{1+|x'|^2}\Big(\frac{1-|x'|^2}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ju+\frac{2x_j}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_nu\Big)+\sum_{\substack{1\le k\le n-1\\k\ne j}}\frac{2x_k}{1+|x'|^2}\Big(\frac{2x_k}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ju-\frac{2x_j}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{N}}^*\partial_ku\Big)$$

$$=\frac{2}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{N}}^*L_{jn}u+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2x_k}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{N}}^*L_{kj}u$$

$$=\pi_{\mathrm{N}}^*\Big(-x_nL_{jn}u+L_{jn}u-\sum_{k=1}^{n-1}x_kL_{jk}u\Big)$$

$$=\pi_{\mathrm{N}}^*\Big(L_{jn}u-\sum_{k=1}^{n}x_kL_{jk}u\Big)=\pi_{\mathrm{N}}^*\Big(L_{jn}u+\sum_{k=1}^{j-1}x_kL_{kj}u-\sum_{k=j+1}^{n}x_kL_{kj}u\Big), \tag{5.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_j(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(x') \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{2\delta_{jk}}{1+|x'|^2}-\frac{4x_jx_k}{(1+|x'|^2)^2}\Big)\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_k u-\frac{4x_j}{(1+|x'|^2)^2}\pi_{\mathrm{S}}^*\partial_n u \\
&= -\frac{2}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{S}}^* L_{jn}u+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2x_k}{1+|x'|^2}\pi_{\mathrm{S}}^* L_{kj}u \\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*\Big(-x_nL_{jn}u-L_{jn}u-\sum_{k=1}^{n-1}x_kL_{jk}u\Big) \\
&= \pi_{\mathrm{S}}^*\Big(-L_{jn}u-\sum_{k=1}^{n-1}x_kL_{jk}u\Big)=\pi_{\mathrm{N}}^*\Big(-L_{jn}u+\sum_{k=1}^{j-1}x_kL_{kj}u-\sum_{k=j+1}^{n}x_kL_{jk}u\Big) \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

と計算される。(5.6) 及び (5.6) より $\pi_{\mathrm{N}}^* u$ 及び $\pi_{\mathrm{S}}^* u$ の一階偏導函数は

$$
\sum_{j=1}^{n}|\partial_j(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(x')|\le\sum_{j=1}^{n}|(\pi_{\mathrm{N}}^* L_{jn}u)(x')|+\sum_{1\le j<k\le n}\frac{4|x_j|}{1+|x'|^2}|(\pi_{\mathrm{N}}^* L_{jk})(x')|, \qquad (5.7)
$$

$$
\sum_{j=1}^{n}|\partial_j(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(x')|\le\sum_{j=1}^{n}|(\pi_{\mathrm{S}}^* L_{jn}u)(x')|+\sum_{1\le j<k\le n}\frac{4|x_j|}{1+|x'|^2}|(\pi_{\mathrm{S}}^* L_{jk})(x')| \qquad (5.8)
$$

と評価される。

m 階の偏導函数は $|\alpha|=m$ として

$$
\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{N}}^* u)=\pi_{\mathrm{N}}^*\Bigg(\sum_{\substack{|\beta|\le m\\ 1\le|\gamma|\le m}}C_{\beta,\gamma}x^\beta L^\gamma u\Bigg), \qquad (5.9)
$$

$$
\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{S}}^* u)=\pi_{\mathrm{S}}^*\Bigg(\sum_{\substack{|\beta|\le m\\ 1\le|\gamma|\le m}}C'_{\beta,\gamma}x^\beta L^\gamma u\Bigg) \qquad (5.10)
$$

と表されることが帰納法によって確かめられる。これらは (5.9) 及び (5.10) より

$$
\sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(x')|\le C(1+|x'|^m)\sum_{1\le|\gamma|\le m}|(\pi_{\mathrm{N}}^* L^\gamma u(x')|, \qquad (5.11)
$$

$$
\sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(x')|\le C(1+|x'|^m)\sum_{1\le|\gamma|\le m}|(\pi_{\mathrm{S}}^* L^\gamma u(x')| \qquad (5.12)
$$

と評価される。

さて $\zeta_0\in C^\infty(\mathbb{R})$ を前節のものとし $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ を $\zeta(x')=\zeta_0(|x'|)$ で定める。このとき $\mathrm{supp}\zeta\subset B(0;2)$ であるから $x'\in\mathrm{supp}\zeta$ ならば $1\le\dfrac{5}{1+|x'|^2}$ であり (4.18)，(4.19) 同様

$$
\begin{aligned}
\|\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2&\le\int_{B(0;2)}|(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(x')|^2dx' \\
&\le\Big(\frac{5}{2}\Big)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|(\pi_{\mathrm{N}}^* u)(x')|^2\Big(\frac{2}{1+|x'|^2}\Big)^{n-1}dx'=\Big(\frac{5}{2}\Big)^{n-1}\|u\|_{L^2(S^{n-1})}^2, \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

$$
\|\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2\le\Big(\frac{5}{2}\Big)^{n-1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|(\pi_{\mathrm{S}}^* u)(x')|^2\Big(\frac{2}{1+|x'|^2}\Big)^{n-1}dx'=\Big(\frac{5}{2}\Big)^{n-1}\|u\|_{L^2(S^{n-1})}^2 \qquad (5.14)
$$

が従う。ここに単位球面上の積分の立体射影表現を用いた。

同様に (5.9)，(5.10) 及び (5.1)，(5.12) を用い

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m} \|\zeta\partial^\alpha(\pi_{\mathrm{N}}^* u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + C\sum_{j=1}^{m}\|\zeta_0^{(j)}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\sum_{1\le|\alpha|\le m}\int_{B(0;2)}|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u)(x')|^2dx'$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|L^\alpha u\|^2_{L^2(S^{n-1})} + C\sum_{j=1}^{m}\|\zeta_0^{(j)}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\sum_{1\le|\alpha|\le m}\|L^\alpha u\|^2_{L^2(S^{n-1})}, \tag{5.15}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\le C\sum_{|\alpha|=m}\|L^\alpha u\|^2_{L^2(S^{n-1})} + C\sum_{j=1}^{m}\|\zeta_0^{(j)}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\sum_{1\le|\alpha|\le m}\|L^\alpha u\|^2_{L^2(S^{n-1})} \tag{5.16}$$

を得る。$m=\left[\dfrac{n}{2}\right]+1,\ n\le 2$ に対するソボレフ埋蔵不等式 (1.8) 及び (5.13)，(5.16) より

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(S_-^{n-1})} &= \|\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^\infty(\overline{B(0;1)})} \le \|\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\\ &\le \sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\zeta\pi_{\mathrm{N}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}\|L^\alpha u\|_{L^2(S^{n-1})},\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(S_+^{n-1})} &= \|\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^\infty(\overline{B(0;1)})} \le \|\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}\\ &\le \sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha(\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\zeta\pi_{\mathrm{S}}^* u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}\\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}\|L^\alpha u\|_{L^2(S^{n-1})}\end{aligned} \tag{5.18}$$

が従い、これより (2.1) が得られる。

参考文献：
小澤徹，単位球面上の積分 http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/pdf/unit_sphere.pdf
T. Aubin, “ Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry,” Springer, 1998.
L. Hörmander, “ Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations,” Springer, 1997.
S. Klainerman, Uniform decay eatimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation, Comm. Pure Appl. Math., **38**(1995), 321-332.
C. D. Sogge, “ Lectures on Non-Linear Wave Equations,” Second Edition, International Press, 2013.